

Transformações Canônicas

Na dinâmica lagrangeana, vimos que qualquer transformação reversível das coordenadas generalizadas $q \rightarrow Q(q)$ preservava a forma das eqs. de Lagrange. No caso da dinâmica Hamiltoniana, podemos da mesma forma estudar o efeito de transformações $(q, p) \rightarrow (Q(q, p, t), P(q, p, t))$ para novas variáveis no espaço de fase.

Como veremos, estas transformações mais gerais terão uma utilidade muito além das simples mudanças de coordenadas. Para ter uma ideia, suponha que seja possível, através de uma transformação $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, reescrever as eqs. de movimento de modo que um determinado Q_i seja uma coordenada cíclica. Nesse caso, já sabemos que automaticamente $P_i = \text{cte}$. Na prática, portanto, a dimensão efetiva do problema se reduz em 2 para cada coordenada cíclica que encontramos.

Indo mais além, imagine agora uma situação em que, após uma transf. reversível $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, o sistema seja descrito por um Hamiltoniano $H(P)$, ou seja, no qual todas as coordenadas Q_i sejam cíclicas, e t não apareça explicitamente. Nesse caso, $P_i \equiv \alpha_i$ constante, e portanto $\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \equiv \omega_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ também é constante, e teríamos a solução geral

$$Q_i = \omega_i t + \beta_i$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ seriam determinados pelas condições iniciais.

Finalmente, invertendo a transformação obteremos $(q,p)(t)$. Em outras palavras, neste caso o sistema fica completamente resolvido!

Evidentemente, não é em geral fácil encontrar essa transformação "mágica", veremos mais sobre como fazer isto no próximo capítulo.

Antes porém, temos de tomar mais cuidado na hora de selecionar quais transformações $(q,p) \rightarrow (Q,P)$ são aceitáveis. O problema é que, ao contrário das transformações de coordenadas que já estudamos, este tipo mais geral de transformação em geral não preserva a forma das eqs. de Hamilton (ou Lagrange).

ex: considere a transformação $Q = q$, $P = \sqrt{p} - \sqrt{q}$

suponha $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ [o.H.S. com $m = \omega = 1$]. As eqs. de Hamilton, nas words

q, p originais, são: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q$. Transformando essas eqs. para Q, P , temos

$$Q = (P + \sqrt{Q})^2; \quad \frac{d}{dt} [P + \sqrt{Q}]^2 = -Q \rightarrow \dot{P}(2P + 2\sqrt{Q}) + \frac{P\dot{Q}}{\sqrt{Q}} + \dot{Q} = -Q$$

$$\therefore \dot{Q} = P^2 + 2P\sqrt{Q} + Q; \quad \dot{P} = \frac{-Q - \frac{\dot{Q}}{\sqrt{Q}}(P + \sqrt{Q})}{2(P + \sqrt{Q})} = \frac{-Q}{2(P + \sqrt{Q})} - \frac{1}{2\sqrt{Q}}(P^2 + 2P\sqrt{Q} + Q)$$

Para continuar sendo um sistema Hamiltoniano, teria de existir uma função $K(Q, P, t)$ tal que

$$\frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} = P^2 + 2P\sqrt{Q} + Q \quad e \quad \frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P} = \frac{Q}{2(P+\sqrt{Q})} + \frac{1}{2\sqrt{Q}} (P^2 + 2P\sqrt{Q} + Q)$$

Porém, isto não é possível, pois temos $\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = 1 + \frac{P}{\sqrt{Q}}$

mas ao mesmo tempo: $\frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q} = -\frac{Q}{2(P+\sqrt{Q})^2} + \left(1 + \frac{P}{\sqrt{Q}}\right) \neq \frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P}$

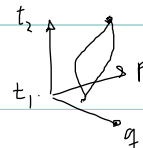
Por causa de casos como este, é interessante definir uma classe de transformações reversíveis no espaço de fase, que têm de fato a propriedade de preservar a forma das eqs. de Hamilton p/ qualquer Hamiltoniano. Como já vimos, um sistema obedece a essas eqs. qdo satisfaz o princípio de Hamilton

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) dt \right] = 0$$

O que precisamos, portanto, é que para todo $H(q, p, t)$ exista algum novo Hamiltoniano $K(Q, P, t)$ tal que também valha

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) dt \right] = 0$$

onde em ambos os casos podemos assumir que as variações são feitas sobre curvas com extremidades fixas no esp. de fase.



A condição mais geral para ambas essas relações valerm simultaneamente é

$$\lambda \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{d\phi}{dt}$$

onde $\lambda = \text{cte}$ (indep. de q, p e t) e ϕ é qualquer função definida no espaço de fase [pois $\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \delta [\phi(z_2) - \phi(z_1)] = 0$, já que as variações são feitas sobre trajetórias c/ extremidades fixas]. Podemos então definir

Def: Uma transformação inversível $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é chamada de "canônica estendida" se para qualquer $H(q, p, t)$, existirem funções $\phi(q, p, t)$ e $K(Q, P, t)$ e alguma constante λ tais que

$$\lambda \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right] = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\phi}{dt}$$

Frisa-se que em geral $K(Q, P) \neq H(q(Q, P), p(Q, P))$!

Exemplo: um reescalonamento das variáveis canônicas é uma transformação da forma
 $q_i \rightarrow Q_i = \mu_i q_i \quad p_i \rightarrow P_i = \nu_i p_i$, onde $\mu_i \nu_i = \lambda_0 = \text{cte}$, $\forall i$

(essa transf. representa uma mudança nas unidades usadas para medir cada q_i)

claramente, esta transformação é "canônica estendida": dado qq H , se tomamos

$K(Q, P, t) = \lambda_0 H(q(Q), p(P), t)$; $\lambda = \lambda_0$; $\phi = 0$ na eq. acima, ela é satisfeita.

Dada agora qualquer t.c.e. $q, p \rightarrow Q, P$, com determinados $\phi(q, p)$, λ e $K[H]$,
 defina $Q' \equiv \lambda Q$ e $P' \equiv P$. Vemos então que $\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i' \dot{Q}_i' - \frac{K}{\lambda} + \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\phi}{\lambda} \right)$
 e portanto a transformação $(q, p) \rightarrow (Q', P')$ é tb uma t.c.e. com $\lambda = 1$.

Podemos concluir assim que toda transf. canônica estendida pode ser vista como
 uma sequência de duas transformações: primeiro uma t.c.e. com $\lambda = 1$, e em seguida
 um reescalonamento.

Por conta disso, a partir de agora vamos nos ocupar quase exclusivamente das transformações
 com $\lambda = 1$, que chamaremos simplesmente de "canônicas". Em outras palavras:

Def: Uma transformação inversível $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é chamada de
 "canônica" se para qualquer $H(q, p, t)$, existirem funções $\phi(q, p, t)$ e $K(Q, P, t)$
 tais que

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\phi(q, p)}{dt}$$

obs: note que a relação acima lembra muito aquela que usamos quando definimos
 Lagrangeanas equivalentes ($L(q, \dot{q}, t) = \bar{L}(Q, \dot{Q}, t) + \frac{d\phi(q)}{dt}$). A diferença está no fato
 de que aqui ϕ não é apenas função das coordenadas, mas tb dos momentos.

Exemplo de uma transformação que é canônica: suponha que $Q = -p$, $P = q$ (ie, trocamos $q \leftrightarrow p$ a menos de um sinal). Então, dado qualquer $H(q, p, t)$:

$$\left. \begin{aligned} Q = -p &= \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q} = \frac{\partial H[q(Q, P), p(Q, P), t]}{\partial P} \\ ; \quad \dot{P} = \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial H[q(Q, P), p(Q, P), t]}{\partial Q} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &Q, P \text{ satisfazem as eqs. de Hamilton} \\ &\text{com } K(Q, P, t) = H[q(Q, P), p(Q, P), t] \end{aligned}$$

Note que, para demonstrar a canonicidade desta transformação, apresentamos explicitamente um novo $K(Q, P, t)$ para cada $H(q, p, t)$. Para outras transformações mais complicadas, pode ser extremamente trabalhoso fazer isso.

Para evitar de ter de fazer isso, apresentaremos dois métodos alternativos poderosos que também permitem determinar se uma dada transformação $q, p, t \rightarrow Q, P, t$ é ou não canônica.

O primeiro método se baseia no conceito de "funções geradoras". O segundo, que veremos mais adiante, envolve os parênteses de Poisson.

Funções geradoras

Para entender o que significa uma função geradora, considere uma função arbitrária $F_1(q, Q, t)$, onde (q, Q) são $2n$ variáveis independentes

Defina então $2n$ funções $p_i(q, Q, t) \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$; $Q_i(q, Q, t) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$

Suponha agora que F_1 seja tal que seja possível inverter essas eqs., ou seja escrever $Q_i(q, p, t)$ e $q_i(Q, p, t)$. Nesse caso, F_1 define implicitamente uma transformação inversível

$$(q, p, t) \xrightarrow{\mathcal{L}_{F_1}} (Q, p, t).$$

Observe agora que, se tomamos ainda

$$\phi(q, p, t) = F_1(q, Q(q, p, t)) \quad e$$

$$K(Q, p, t) = H(q(Q, p, t), p(Q, p, t), t) - \frac{\partial F_1(q(Q, p, t), Q, t)}{\partial t}, \text{ segue-se que}$$

$$\sum_i p_i \dot{Q}_i - K + \frac{d\phi}{dt} = \sum_i \left[-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] + \frac{\partial F_1}{\partial t} - K = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$$

Portanto, $\mathcal{L}_{F_1}$ é uma transformação canônica! Dizemos que F_1 é a "função geradora" dessa transformação

exemplo (trivial): $F_1 = \sum_{k=1}^n q_k Q_k \rightarrow p_i = Q_i ; P_i = -q_i$

$\therefore$ Nesse caso $K(Q, P) = H(q, p) = H(-P, Q)$

(ie, a menos do sinal, essa transformação canônica inverte ^{coords.} e _{mons.})

Ex. menos trivial: considere 1 partícula em 1D, e tome

$$F_1(q, Q, t) = \frac{m(q-Q)^2}{2t}$$

$$\rightarrow p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{m}{t}(q-Q) \rightarrow Q = q - \frac{t p}{m}$$

$$; P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m}{t}(q-Q) = p \rightarrow q = Q + \frac{t P}{m}$$

Ainda: dado $H(q, p)$; $K(Q, P, t) = H(q, p, t) - \frac{m(q-Q)^2}{2t^2}$

Em particular, no caso em que $H = \frac{p^2}{2m}$ (partícula livre) :

$$K = \frac{P^2}{2m} - \frac{m}{2} \left(\frac{P}{m} \right)^2 = 0!$$

Mas isso significa que, nessas coordenadas, as eqs. de Hamilton ficam triviais!

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 ; \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \rightarrow Q = a ; P = b \text{ (cte)}$$

Retomando p/ coordenadas originais: $p = b$; $q = a + \frac{bt}{m}$ Solução!

Essa é portanto a idéia básica da aplicação das transf. canônicas: reduzir um problema a outro que fique mais simples (de preferência, trivial).
(Naturalmente nesse exemplo o problema original já era simples).

Reciprocamente, dada uma transf. canônica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, com funções $\phi(q, p, t)$ e $K(Q, P, t)$, suponha que seja possível inverter as eqs para $Q_i(p, q)$ de modo a exprimir $p_i(Q, q, t)$.

Nesse caso (e só nesse caso) existirá uma função geradora $F_1(q, Q)$.

Para ver isto note que, se podemos escrever $p_i(q, Q, t)$, então tb podemos exprimir $P_i(q, Q, t)$, e portanto podemos considerar (q, Q) como 2n variáveis independentes. Assim, podemos definir

$$F_1(q, Q, t) \equiv \phi(q, p(q, Q, t))$$

E tomando a forma diferencial da condição de canonicidade

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - P_i dQ_i + (K - H) dt = d\phi$$

$$\text{segue-se que } p_i = \frac{\partial \phi}{\partial q_i} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H$$